

Beregning av rullefriksjonskoeffisienten i et system med dempede svingninger

T. Bratvold^a, L. Eriksen^a, J. Vahlin^a, S. Hubred^a

^aInstitutt for elektroniske systemer, Norges teknisk-naturvitenskapelige universitet, 7491 Trondheim.

Sammendrag

Ved å analysere bevegelsen til en kule i en U-bane kan friksjonskoeffisienten til samtlige friksjonskrefter bestemmes. Ved hjelp av et høyhastighetskamera og numeriske beregninger ble denne bestemt til $(2,8 \cdot 10^{-3} \pm 0,0007) \text{kg/s}$. Resultatet betraktes som godt, ettersom de teoretiske verdiene for posisjonen med friksjonskoeffisienten innsatt, stemte godt overens med de målte verdiene for posisjonen. Usikkerheten i resultatet kan skyldes unøyaktighet i målinger.

1. Introduksjon

Dempede svingninger er en fysisk modell som kan beskrive mange ulike situasjoner i dagligliv og vitenskap. Et studie og god forståelse av en slik modell vil derfor være viktig for personer med ambisjoner om karriere innenfor mange ulike disipliner av vitenskapen.

I denne rapporten skal denne modellen undersøkes. Til å gjenskape et system med dempede svingninger benyttes en U-bane og svingningene vil bli gjenskapt ved at et kuleformet legeme beveger seg i banen. I tillegg til å oppnå en bedre forståelse for system med dempede svingninger, vil det endelige målet med forsøket være å bestemme friksjonskoeffisienten til summen av friksjonskreftene som virker på legemet.

Ved å analysere legemets bevegelse, kan data om legemets posisjon i banen ved diskrete tidspunkt uthentes. De eksperimentelle datapunktene vil bli analysert numerisk ved Eulers metode for å bestemme kulens bevegelse i x -retning, og slik kan friksjonskoeffisienten bestemmes.

2. Teori

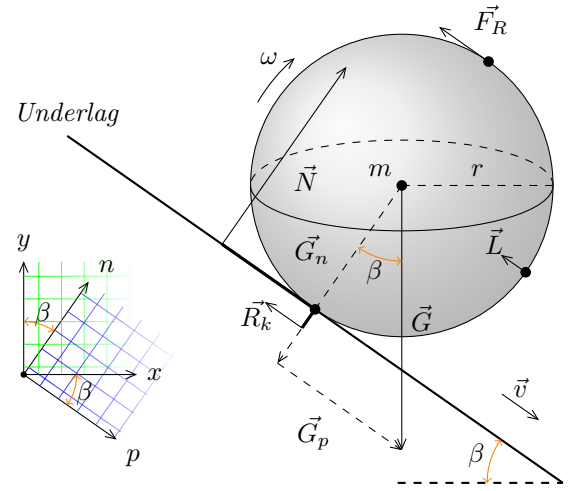
Ethvert legeme med masse m som befinner seg i jordas tyngdefelt vil til enhver tid bli påvirket av en tyngdekraft \vec{G} [1, s. 126] jf. Figur 1, der

$$\vec{G} = m \cdot \vec{g} \quad (1)$$

er rettet nedover mot jordens massesentrum, og \vec{g} er tyngdeakselerasjonen – også rettet mot jordens massesentrum. Når legemet befinner seg på et underlag hvis vinkel mot jordas overflate er β , kan tyngdekraften \vec{G} dekomponeres i dens parallellkomponent \vec{G}_p og normalkomponent \vec{G}_n , slik at

$$\vec{G} = \begin{cases} \vec{G}_p = \vec{G} \cdot \sin \beta \\ \vec{G}_n = \vec{G} \cdot \cos \beta \end{cases} \quad (2)$$

Videre vil legemet ha en normalkraft \vec{N} [1, s. 126] som er rettet ortogonalt oppover fra kontaktpunktet med overflaten, slik at



Figur 1: Kraftene som virker på kulen under bevegelse.

$$\vec{N} = -\vec{G}_n \quad (3)$$

Siden legemet triller uten sluring nedover på underlaget, vil det opparbeide seg en viss kinetisk rotasjonsenergi K_r . Konsekvensen av dette er at en viss rotasjonskraft \vec{F}_R virker i motsatt retning av legemets fart \vec{v} , og vil derfor motsette seg endringer i farten. Tilsvarende vil legemet tape kinetisk rotasjonsenergi når det senere ruller oppover, slik at F_R nå virker med fartsretningen \vec{v} . Dette fenomenet kan oppsummeres i at

$$\begin{aligned} |\vec{F}_R| &= I_0 \cdot \frac{\dot{\omega}}{r} \\ &= \frac{I_0 a}{r^2} \end{aligned} \quad (4)$$

hvor r er kulens radius jf. Figur 1 og I_0 er kulens treghetsmoment [1, s. 308].

Etttersom rommet som legemet beveger seg i er luftfylt, vil partiklene i luften kollidere mot legemet når det beveger seg i sin bane. Dette vil gjøre at legemet bremses, og en samlet kraft forårsaket av alle disse kollisjonene

er luftmotstanden \vec{L} . Denne vil altså virke mot legemets bevegelsesretning. Hastigheten som legemet maksimalt tiltar vil alltid være så lav at luftstrømmen rundt den er laminær. Som en følge av dette vil luftmotstanden være proporsjonal legemets hastighet \vec{v} . Videre vil ujevnheter i underlaget og legemets overflate bremse det ned med en friksjonskraft \vec{R}_k , også proporsjonal med hastigheten \vec{v} . Proporsjonalitetskoeffisientene til \vec{L} og \vec{R}_k kan samles under konstanten k , og slik kan de to kreftene behandles som én kraft $\vec{F}_{tot} = \vec{L} + \vec{R}_k$, som er av størrelsen

$$\vec{F}_{tot} = k\vec{v} \quad (5)$$

Det antas i dette forsøket at kula aldri mister kontakten med underlaget, og det kan derfor sees bort ifra akselerasjonen a_n , og dermed også kreftene $\sum F_n = G_n + N$, som virker ortogonalt på banen. Kraftene F_p som virker parallelt med banen er gitt ved (6).

$$\sum F_p = |\vec{G}_p| - |\vec{F}_R| - |\vec{F}_{tot}| \quad (6)$$

Jf. Newtons 2. lov må også $\sum F_p = m \frac{d^2 s_x}{dt^2}$. I henhold til (6) vil akselerasjonen i x -retning $\frac{d^2 s_x}{dt^2}$ være gitt ved (7).

$$\frac{d^2 s_x}{dt^2} = \frac{-g \cdot \sin(\beta) - \frac{k}{m} \frac{ds_x}{dt} \cdot \cos(\beta)}{c + 1} \quad (7)$$

Likning (7) kan løses numerisk med Eulers metode [2] for å finne $v_x[t]$ og deretter $s_x[t]$ gitt ved likningene

$$v_x[t_{n+1}] = v_x[t_n] + a_x[t_n] \cdot (t_{n+1} - t_n) \quad (8)$$

$$s_x[t_{n+1}] = s_x[t_n] + v_x[t_n] \cdot (t_{n+1} - t_n) \quad (9)$$

En forutsetning for å kunne løse (8) og (9) vil altså være å kjenne initialbetingelsene $s_x[t_0]$ og $v_x[t_0]$.

Under eksperimentet vil alle målte størrelser medføre en viss usikkerhet. Utstyret som blir brukt til måling av forskjellige størrelser vil ha sin måleunøyaktighet spesifisert og som må tas hensyn til når målte størrelser blir brukt til videre beregninger eller drøfting av resultater. Et mål på usikkerheten til hver enkelt måling kalles for standardavviket, δx , og er det gjennomsnittlige avviket av N antall målinger fra den mest sannsynlige verdien på målingen, gitt ved

$$\delta x = \sqrt{\frac{1}{N-1} \sum_{i=1}^N (x_i - \bar{x})^2} \quad (10)$$

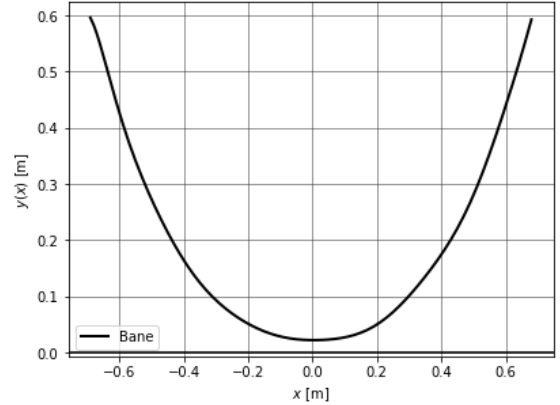
hvor \bar{x} er gjennomsnittet av N antall målinger.

I størrelser som blir avledet – dvs. beregnet av en eller flere målte størrelser, vil usikkerheten fra de målte størrelsene propagere til den avledete størrelsen. I en avledet størrelse, $f(x, y, \dots)$, vil usikkerheten til f , δf , være gitt ved Gauss' feilforplantningslov gjengitt i (11) [3].

$$\delta f = \sqrt{\left(\frac{\partial f}{\partial x} \delta x\right)^2 + \left(\frac{\partial f}{\partial y} \delta y\right)^2 + \dots} \quad (11)$$

3. Eksperimentell metode

Figur 2 illustrerer U-banen som ble benyttet i forsøket.



Figur 2: Illustrasjon av U-banen. Estimert basert på datapunktene fra forsøket.

Under utføringen av eksperimentet blir en neoprenbelagt stålkule med masse $m = (29,9 \pm 0,01)$ g sluppet ned U-banen i Figur 2. Bevegelsen til ballen filmes ved hjelp av et høyhastighetskamera som er plassert $(1,5 \pm 0,001)$ meter fra opphengsveggen. Videoinnspillingen blir gjort med bildefrekvens på 100 bilder per sekund. Deretter blir bevegelsen tallsatt i et koordinatsystem ved bruk av videoanalyseprogrammet Tracker[4]. Tracker analyserer bevegelsen til kula, og generer et datasett med x - og y -verdier for tidsverdier med et intervall $\Delta t = 10$ ms.

Den teoretiske modellen beskrevet i Kapittel 2 baserer seg på at kula ruller uten sluring, og aldri mister kontakten med banen. Dette kan bekreftes visuelt ved å studere videoen av bevegelsen til kula.

Forsøket gjennomføres 10 ganger slik at en gjennomsnittsverdi og et standardavvik for kulens posisjon kan beregnes.

Rullebevegelsen reproduseres numerisk ved å løse likningene (8) og (9) med Eulers metode. Den gjennomsnittlige startposisjonen til kula benyttes som initialbetingelsen $s_x[t_0]$, og initialbetingelsen $v_x[t_0]$ settes til 0.

Et 15-gradspolynom $y(x)$ bestemmes ved minste kvadraters metode basert på datapunktene fra alle forsøkene. Grafen til dette polynomet vises i Figur 2.

Ekstremalpunktene m_n til $s_x(t)$ identifiseres for hvert forsøk, og de gjennomsnittlige ekstremalpunktene \bar{m}_n kalkuleres. Differensiallikningen (7), med β beregnet ut fra $y(x)$, løses deretter numerisk ved Eulers metode for forskjellige verdier av k .

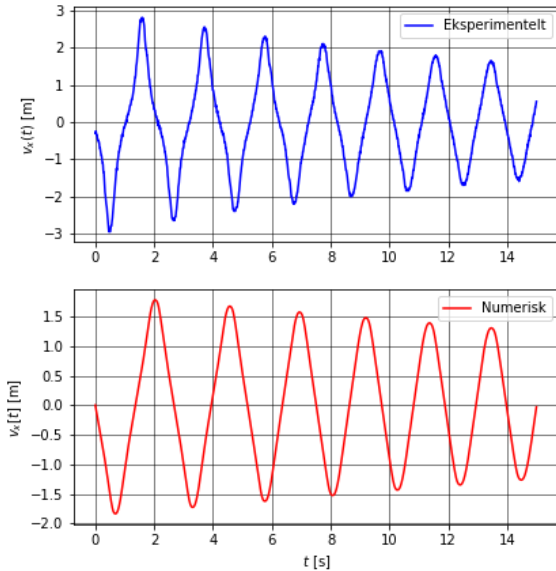
For hver simulering identifiseres ekstremalpunktene r_n til $s_x[t]$, og Mean Squared Error (MSE) sammenlignet med de eksperimentelle verdiene kalkuleres som i (12). Den verdien av k som gir minst mulig MSE antas å være den beste tilnærmingen av k .

$$MSE = \frac{1}{N} \sum_{n=1}^N (r_n - \bar{m}_n)^2 \quad (12)$$

4. Resultater

Fra metoden i Kapittel 3 ble rullefriksjonskoeffisienten k bestemt til $k = (2,8 \cdot 10^{-3} \pm 0,0007) \text{ kg/s}$. Ved å tilnærme k som et Taylorpolynom av 1.orden, ble usikkerheten i k beregnet ved å betrakte usikkerheten til målingene for massen og posisjonen til kulen i Gauss feilforplantningslov, fra Liking (11).

Figur 3 viser $v_x(t)$ fra et representativt datasett sammen med de numeriske beregnede verdiene for $v_x[t]$ med k innsatt. Legg merke til at kulen starter med negativ fart. Dette er fordi positiv fart ble definert mot høyre, og kulen startet bevegelsen mot venstre.



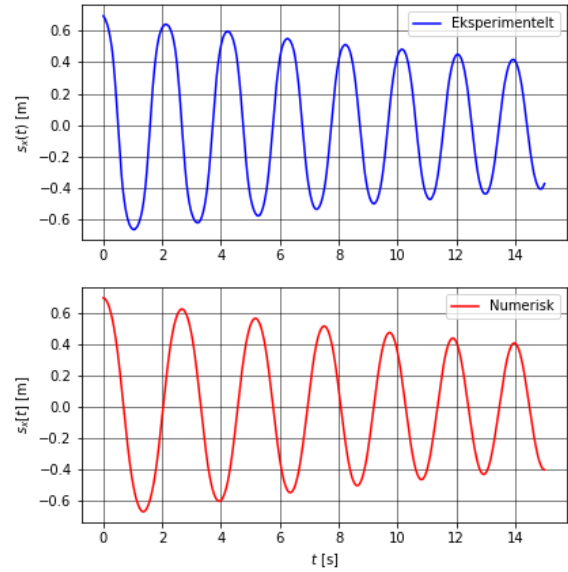
Figur 3: Målte eksperimentelle verdier for kulens fart i x-retning (med positiv retning mot høyre) $v_x(t)$ (blå), og numerisk beregnede verdier $v_x[t]$ (rød).

Tilsvarende viser Figur 4 $s_x(t)$ fra et representativt datasett sammen med de numeriske beregnede verdiene for $s_x[t]$ med k innsatt.

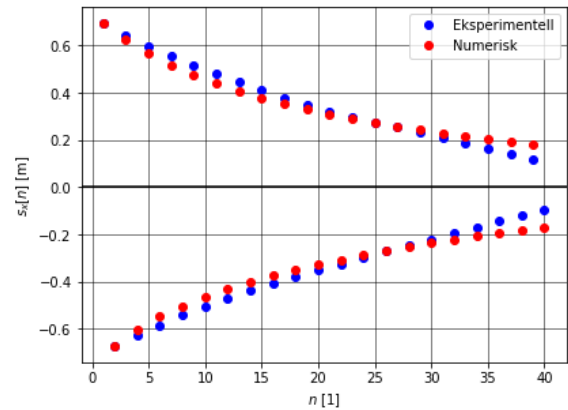
Figur 5 viser ekstremalverdiene til posisjonen i x retning numerisk $s_x[t]$ og eksperimentelt $s_x(t)$.

5. Diskusjon

Å bestemme hvorvidt estimatet for friksjonskoeffisienten k er et godt resultat er vanskelig, ettersom det ikke finnes noen teoretiske verdier, eller andre liknende forsøk å sammenlikne det med. En god indikator på at resultatet er



Figur 4: Målte eksperimentelle verdier for kulens posisjon i x-retning (med positiv retning mot høyre) $s_x(t)$ (blå), og numerisk beregnede verdier $s_x[t]$ (rød).



Figur 5: Denne grafen sammenligner ekstremalpunktene r_n (blå) og \bar{m}_n (rød).

korrekt er at grafene til de numeriske beregningene stemmer godt overens med grafene til de målte verdiene. Samtidig måles ofte rullefriksjonskoeffisienten til nye sykkelhjul til mellom 0,0025 og 0,005[5], slik at verdien for k , som er inklusiv bl.a luftmotstand, fremstår sannsynlig for en liten, massiv kule på en plastbane.

En betydelig grad av usikkerhet er tilstede i resultatet. Forplantningsfeilen i k , beregnet ved Gauss' feilforplantningslov fra likning (11) er $\pm 0,0007$. Dette betraktes som en relativt stor usikkerhet. Dette skyldes usikkerhet i måling av kulens masse og målefeil i analyseprogrammet Tracker.

Spesielt målefeil i Tracker bør nevnes. Koordinatsystemet har neppe blitt plassert helt likt i analysen av de 10 forskjellige målingene og feil i dataene for kulens posisjon må derfor antas å spille inn her.

Det må i tillegg nevnes at linsefeil vil oppstå. Avstanden fra kameraet til opphengsveggen var $(1,5 \pm 0,001)$ meter. Ettersom denne avstanden er relativt liten, kan det gi en betydelig linsefeil.

Figur 4 viser at de numeriske beregningene er ute av fase med de målte eksperimentelle verdiene. Dette er indikasjon på at verden ikke er så lineær som modellene tilsier. Som Figur 3 viser er amplituden til den eksperimentelle farten omtrent dobbelt så stor som amplituden til den numerisk beregnede farten. Dette skyldes en ukjent feil.

6. Konklusjon

Friksjonskoeffisienten til en kule i en U-bane ble bestemt ved og analysere bevegelsen til kulen ved et datanalyseprogram og gjennomføre numeriske beregninger. Friksjonskoeffisiten ble bestemt til $(2,8 \cdot 10^{-3} \pm 0,0007)\text{kg/s}$.

Hvorvidt dette er en god beregning eller ikke er vanskelig å si, men en god indikator på at resultatet er rimelig er at numeriske beregninger stemmer godt overens med målte verdier.

-
- [1] H.D.Young og R. A. Freedman: *University Physics*. Pearson Education, 2016.
 - [2] M. A. Gjennestad, V. Hagen, A. Kvaal M. Vassvik T. B. Wiig og P. Berg: *Euler's method*. https://nbviewer.jupyter.org/url/www.numfys.net/media/notebooks/eulers_method.ipynb, (sist sjekket 08.11.18).
 - [3] Lilledahl, M. B. og V. Risinggård: *Målinger og usikkerhet*. Institutt for fysikk, NTNU, 2017.
 - [4] Brown, D.: *Tracker Documentation*. <https://physlets.org/tracker/>, (Lastet ned 11.10.18).
 - [5] *Wikipedia - Rolling Resistance*. https://en.wikipedia.org/wiki/Rolling_resistance, (sjekket 01.11.2018).